$$\lim_{x\to 1^-}[f_k(x) - f_k(1)].\frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^k}{\sqrt{1-x}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 1

2/a/ $f'_k(x) = k\,x^{k-1}\sqrt{1-x}\cdot\frac{x^k}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2kx^{k-1}-(2k+1)x^k}{2\sqrt{1-x}}$; $k \geq 1$

$$= \frac{x^{k-1}\,[2k-(2k+1)x]}{2\sqrt{1-x}}$$

x	0	$\frac{2k}{2k+1}$	1
$f'_k(x)$	+	0	-
$f_k(x)$	0 ↗	$\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^k\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1}$	↘ 0

Si k = 0 ; $f'_0(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0$

x	0	1
$f_0'(x)$	-	
$f_0(x)$	1 ↘	0

2-b)Voir figure ci-dessous

3°/ $\int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \left[\frac{-2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1$

4°/ $I_k = \int_0^1 f_k(x)dx = \frac{2}{3}$

a/ Montrons que : $I_k = \frac{2}{2k+3}\,I_{k-1}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn